Mathematik

Die Winkelderivierte und das Poisson-Stieltjes-Integral

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades bei
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Schlesischen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Breslau

vorgelegt von

Alfred Herzig
aus Breslau

Breslau 1940

Referent: Professor Dr. Radon
Korreferent: Professor Dr. Feigl

Examen rigorosum: 19. Juli 1939

Gedruckt mit Genehmigung der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Schlesischen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Breslau

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Die Arbeit ist erschienen in der Mathematischen Zeitschrift,
Band 46, Heft 1

Die Winkelderivierte und das Poisson-Stieltjes-Integral *).

Von

Alfred Herzig aus Breslau.

Von G. Julia und C. Carathéodory[1]) stammt der folgende Satz:

I. *Ist* $F(z)$ *in* $|z| < 1$ *analytisch und ist daselbst* $|F(z)| \leqq 1$, *so existiert der endliche oder unendliche Grenzwert*

$$D = \lim_{z \to 1} \frac{F(z) - 1}{z - 1},$$

wenn z *in Winkelannäherung, d. h. zwischen zwei in* $z = 1$ *endenden Sehnen des Einheitskreises, gegen* 1 *strebt. Ist* D *endlich, so ist es nichtnegativ, und es gilt*

$$\frac{|1 - F(z)|^2}{1 - |F(z)|^2} \leqq D \frac{|1 - z|^2}{1 - |z|^2}$$

für alle z *mit* $|z| < 1$. *Steht hierin das Gleichheitszeichen für ein* z *aus* $|z| < 1$, *so gilt es für jedes* z *im Innern des Einheitskreises, und es ist*

$$F(z) = \frac{1 + z - (D + ic)(1 - z)}{1 + z + (D - ic)(1 - z)}$$

mit beliebigem reellem c. *Ferner gilt, wenn* D *endlich ist, gleichmäßig bei Winkelannäherung*

$$\lim_{z \to 1} F'(z) = D.$$

Schließlich ist $D = 0$ *nur für* $F(z) \equiv 1$.

Dieser Grenzwert D heißt die *Winkelderivierte* von $F(z)$ im Punkte $z = 1$. Versteht man unter Δ ein im Innern des Einheitskreises gelegenes Dreieck, dessen eine Ecke der Punkt $z = 1$ ist, und das die reelle Achse zur Symmetrieachse hat, so ist nach Carathéodory notwendig und hinreichend für die Endlichkeit von D die Bedingung: Es gibt eine Δ angehörende Punktfolge z_n mit $\lim_{n \to \infty} z_n = 1$ derart, daß $\left|\frac{1 - F(z_n)}{1 - z_n}\right| < M$ für alle n gilt.

*) Diese Arbeit wurde von der naturwissenschaftlichen Fakultät der Schlesischen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Breslau als Dissertation (D 2) angenommen.

[1]) G. Julia, Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles. Journ. de Math. (8) **1** (1918), S. 47—245, insbesondere S. 72. Vgl. auch G. Julia, Extension nouvelle d'un lemme de Schwarz. Acta Math. **42** (1918), S. 349—355. — C. Carathéodory, Über die Winkelderivierten von beschränkten analytischen Funktionen. Sitzungsber. Akad. Berlin 1929, S. 39—54.

Das Ziel der folgenden Betrachtungen soll nun zunächst sein, für den Satz I einen neuen Beweis zu geben, der neben seiner Kürze den Vorzug besitzt, die bestehenden Zusammenhänge vielleicht organischer aufzuklären. Wir gehen aus von der sogenannten Poisson-Stieltjesschen Integraldarstellung. Hierzu eine kurze Vorbemerkung:

Es sei $f(z) = u(z) + iv(z)$ eine in $|z| < 1$ analytische Funktion; dann läßt sie sich in bekannter Weise durch das Poissonsche Integral

$$(1) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{R e^{i\vartheta} + z}{R e^{i\vartheta} - z} u(R e^{i\vartheta})\, d\vartheta + i v(0)$$

für $|z| < R < 1$ darstellen. Setzt man

$$(2) \qquad \alpha(R, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\vartheta} u(R e^{i\varphi})\, d\varphi,$$

so ist, da $u(z)$ in $|z| < 1$ harmonisch ist, $\alpha(R, \vartheta)$ für jedes $R < 1$ hinsichtlich ϑ stetig differenzierbar mit der Ableitung $\frac{1}{2\pi} u(R e^{i\vartheta})$. Daraus folgt

$$(1') \qquad f(z) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{R e^{i\vartheta} + z}{R e^{i\vartheta} - z}\, d\alpha(R, \vartheta) + i v(0).$$

Die Darstellung (1') von $f(z)$ als Stieltjes-Integral ist, solange $R < 1$ bleibt, mit (1) völlig gleichwertig. Bei geeigneten Voraussetzungen über $f(z)$ besteht indes, wie zuerst F. Riesz[2]) nachgewiesen hat, die Gleichung (1') auch noch für $R = 1$; es gilt nämlich[3]):

II. *Ist $f(z)$ in $|z| < 1$ analytisch, und ist daselbst $\Re(f(z)) = u(z)$ als Differenz zweier nichtnegativer Potentialfunktionen darstellbar, dann gibt es eine Funktion $\alpha(\vartheta)$ von beschränkter Schwankung, so daß für $|z| < 1$*

$$(3) \qquad f(z) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z}\, d\alpha(\vartheta) + i v(0)$$

ist. Diese Funktion $\alpha(\vartheta)$ ist bis auf eine additive Konstante und bis auf die Werte in ihren (höchstens abzählbar unendlich vielen) Unstetigkeitsstellen eindeutig bestimmt; und zwar kann man setzen:

$$(4) \qquad \alpha(\vartheta) = \lim_{R \to 1} \alpha(R, \vartheta).$$

Ist insbesondere $u(z) \geqq 0$ in $|z| < 1$, so ist $\alpha(\vartheta)$ monoton wachsend.

[2]) F. Riesz, Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales. Ann. de l'Ecole Normale (3) **28** (1911), S. 33–62.

[3]) Die im Text angegebene Formulierung des Satzes findet man bei R. Nevanlinna, Eindeutige analytische Funktionen (Jul. Springer 1936), S. 180ff.

In der zuletzt genannten speziellen Fassung ist der Satz II von F. Riesz angegeben worden, und in dieser wird er uns im folgenden ausschließlich beschäftigen. Daß die obigen Voraussetzungen notwendig und sogar die allgemeinsten sind, leuchtet sofort ein, da wegen der offensichtlichen Umkehrbarkeit des Satzes die gesamte Klasse der Funktionen erfaßt wird, die die Darstellung (3) zulassen. Bemerkt sei noch, daß die erwähnte Willkür in der Wahl von $\alpha(\vartheta)$ auf den Wert des Stieltjes-Integrals keinen Einfluß hat.

Um mit Hilfe von Satz II zu einem Beweis von Satz I zu gelangen, setze ich

$$f(z) = \frac{1 + F(z)}{1 - F(z)},$$

wobei $F(z)$ eine Funktion sein möge, die den Voraussetzungen von I genügt; dann ist in $|z| < 1$

$$u(z) = \Re(f(z)) = \frac{1 - |F(z)|^2}{|1 - F(z)|^2} \geqq 0.$$

Der leitende Gedanke des Beweises kommt nun in der Beziehung

$$D = \frac{1}{\mu}$$

zum Ausdruck, wenn $\mu = \alpha(0+) - \alpha(0-)$ gesetzt wird. Die Winkelderivierte erscheint also als reziproker Sprung der $F(z)$ vermittels $f(z)$ durch Satz II zugeordneten Funktion $\alpha(\vartheta)$ bei $\vartheta = 0$. Daraus entnimmt man für D sofort die Abschätzung

$$D \geqq \frac{1}{u(0)} = \frac{|1 - F(0)|^2}{1 - |F(0)|^2} \geqq 0,$$

die sich mühelos zu

$$D \geqq n + \frac{|1 - A_n|^2}{1 - |A_n|^2} > n$$

verschärfen läßt, wenn $F(z) = A_n z^n + A_{n+1} z^{n+1} + \ldots$ die Potenzreihenentwicklung von $F(z)$ im Punkte $z = 0$ und $|A_n| < 1$ ist. Am Schluß des ersten Abschnitts der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, wie man aus der Gleichheit der Winkelderivierten zweier Funktionen $F_1(z)$, $F_2(z)$, die die Voraussetzungen von I erfüllen, bei geeigneten Zusatzforderungen auf deren Identität schließen kann.

Im zweiten Abschnitt steht das Poisson-Stieltjes-Integral selbst im Mittelpunkt der Betrachtungen. Ist

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

eine im Einheitskreis analytische Funktion mit nichtnegativem Realteil, so hat man wegen der Integraldarstellung

$$f(z) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z} \, d\alpha(\vartheta)$$

die Formeln

$$a_0 = \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha(\vartheta) = 1, \quad a_n = 2 \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-in\vartheta} \, d\alpha(\vartheta) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Aus diesen Gleichungen, die eine Erweiterung der für $R < 1$ geltenden Fourierformeln

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} u(R e^{i\vartheta}) \, d\vartheta, \quad a_n R^n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-in\vartheta} u(R e^{i\vartheta}) \, d\vartheta$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots)$$

darstellen, folgt für $n \geqq 1$ sofort

$$|a_n| \leqq 2.$$

In dieser Abschätzung kann das Gleichheitszeichen für ein gewisses n nur stehen, wenn

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \frac{e^{i\vartheta_k} + z}{e^{i\vartheta_k} - z}$$

ist mit

$$\mu_k \geqq 0, \quad \sum_{k=1}^{n} \mu_k = 1 \quad \text{und} \quad \vartheta_k = \begin{cases} \dfrac{(2k-n)\pi}{n} - \dfrac{\gamma}{n}, & \text{falls } n \text{ gerade}, \gamma \geqq 0, \\ \dfrac{(2k-(n+1))\pi}{n} - \dfrac{\gamma}{n}, & \text{falls } n \text{ ungerade}, \\ \dfrac{(2k-(n+2))\pi}{n} - \dfrac{\gamma}{n}, & \text{falls } n \text{ gerade}, \gamma < 0, \end{cases}$$

wobei noch $a_n = 2 e^{i\gamma}$ gesetzt ist. Dieses Ergebnis ist nicht neu, sondern im wesentlichen in Untersuchungen von Carathéodory[4]) über Funktionen mit nichtnegativem Realteil enthalten. Dort wird als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

in $|z| < 1$ regulär und dort $\Re(f(z)) \geqq 0$ ist, die folgende erkannt: Für jedes $n = 1, 2, 3, \ldots$ gilt

$$a_m = 2 \sum_{k=1}^{n} \mu_k e^{-im\vartheta_k},$$

[4]) C. Carathéodory, Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen. Math. Annalen 64 (1907), S. 95–115.

wobei $1 \leqq m \leqq n$, $\mu_k \geqq 0$, $\sum_{k=1}^{n} \mu_k \leqq 1$, $-\pi < \vartheta_k \leqq \pi$ ist. $\sum_{k=1}^{n} \mu_k = 1$ gilt für ein n nur dann, wenn

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \frac{e^{i\vartheta_k} + z}{e^{i\vartheta_k} - z}$$

ist. Für die Funktion

$$F(z) = \frac{f(z) - 1}{f(z) + 1}$$

folgt hieraus, daß $F(z)$ auf $|z| = 1$ stetige Randwerte vom absoluten Betrage 1 besitzt. Hierfür ist, wie ich weiter zeige, nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig, daß $\alpha(\vartheta)$ eine reine Sprungfunktion ist.

Den Abschluß der Arbeit bildet eine Verallgemeinerung des Satzes I in folgender Richtung: Die Gleichung $D = \frac{1}{\mu}$ enthält bei positivem μ insbesondere die Abschätzung

$$\frac{1}{1 - F(z)} = O\left(\frac{1}{|1 - z|}\right),$$

wenn z in Winkelannäherung gegen 1 strebt. Allgemeiner folgt nun aber aus

$$\alpha(\vartheta) = O(|\vartheta|^{1-\lambda}) \qquad \text{für} \quad \vartheta \to 0$$

mit $0 < \lambda < 1$ die Beziehung

$$\frac{1}{1 - F(z)} = O\left(\frac{1}{|1 - z|^{\lambda}}\right) \qquad \text{für } z \to 1 \text{ in } \Delta.$$

Hieraus ergibt sich unschwer eine potentialtheoretische Anwendung, die als eine Erweiterung des bekannten Satzes angesehen werden kann, daß das Poissonsche Integral für beschränkte absolut integrable Randwerte $u(\vartheta)$ eine Potentialfunktion darstellt, die in jeder Stetigkeitsstelle von $u(\vartheta)$ bei Winkelannäherung aus dem Kreisinnern den Randwert $u(\vartheta)$ besitzt.

I. Abschnitt. Die Winkelderivierte.

Ich beginne mit dem Beweis des Satzes I. Die Funktion $F(z)$ genüge den Voraussetzungen dieses Satzes; dann ist auch

$$f(z) = \frac{1 + F(z)}{1 - F(z)} \tag{5}$$

in $|z| < 1$ analytisch, und es gilt dort

$$\Re(f(z)) = \frac{1 - |F(z)|^2}{|1 - F(z)|^2} \geqq 0.$$

Nach Satz II gibt es daher eine monoton wachsende Funktion $\alpha(\vartheta)$, die für $f(z)$ die Darstellung

$$f(z) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\, d\alpha(\vartheta) + i\,v(0) \qquad \text{in } |z|<1$$

bei $f(z) = u(z) + iv(z)$ leistet. Ich setze nun

$$\alpha(0+) - \alpha(0-) = \mu; \tag{6}$$

wegen der Montonie von $\alpha(\vartheta)$ existieren ja diese einseitigen Grenzwerte, und überdies ist $\mu \geqq 0$. Nun wird [5])

$$f(z) = \mu\,\frac{1+z}{1-z} + \int_{\substack{-\pi \\ \vartheta \neq 0}}^{+\pi} \frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\, d\alpha(\vartheta) + i\,v(0) = \mu\,\frac{1+z}{1-z} + J + i\,v(0).$$

Für das Integral J besteht die Beziehung[6]):

$$\lim_{z\to 1} (1-z)J = 0.$$

Zum Beweis werde

$$J_1 = \int_{\substack{-\pi \\ \vartheta \neq 0}}^{0} = \int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\substack{-\delta \\ \vartheta \neq 0}}^{0}, \qquad J_2 = \int_{\substack{0 \\ \vartheta \neq 0}}^{\pi} = \int_{\substack{0 \\ \vartheta \neq 0}}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi}, \qquad \text{also } J = J_1 + J_2$$

gesetzt, wobei über $\delta > 0$ noch verfügt werden wird. Dann ist

$$(1-z)\int_{\substack{-\delta \\ \vartheta \neq 0}}^{0} \frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\, d\alpha(\vartheta)\Big| < 2\,\frac{|1-z|}{1-|z|}\,(\alpha(0-) - \alpha(-\delta)) \qquad \text{für } |z|<1.$$

Weiter gilt, wie man ohne weiteres einsieht,

$$\frac{|1-z|}{1-|z|} < M \qquad \text{für } z \text{ in } \Delta. \tag{7}$$

Mithin ist bei geeignetem $\delta_1(\varepsilon)$ für jedes $\delta < \delta_1(\varepsilon)$ und z in Δ

$$\Big|(1-z)\int_{\substack{-\delta \\ \vartheta \neq 0}}^{0}\Big| < 2M\,(\alpha(0-) - \alpha(-\delta)) < \varepsilon.$$

Für ein fest gewähltes $\delta < \delta_1(\varepsilon)$ ist ferner

$$\Big|(1-z)\int_{-\pi}^{-\delta} \frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\, d\alpha(\vartheta)\Big| < |1-z|\,\frac{2}{d}\,(\alpha(-\delta) - \alpha(-\pi)) = C\,|1-z|,$$

---

[5]) Das Integral werde hier, wie auch weiterhin, über das Intervall $\langle -\pi, +\pi\rangle$ unter Auslassung der Stelle $\vartheta = 0$ erstreckt.

[6]) Der Grenzübergang $z \to 1$ ist stets in Winkelannäherung gemeint.

wobei für z in Δ

$$d = \operatorname*{Min}_{-\pi \leqq \vartheta \leqq -\delta} |e^{i\vartheta} - z| > 0$$

ist. Demnach ist

$$\left|(1-z)\int_{-\pi}^{-\delta}\right| < \varepsilon \quad \text{für } z \text{ in } \Delta \text{ und } |1-z| < \eta(\varepsilon),$$

also

$$|(1-z)J_1| < 2\varepsilon \quad \text{für } z \text{ in } \Delta \text{ und } |1-z| < \eta(\varepsilon),$$

d. h.

$$\lim_{z \to 1}(1-z)J_1 = 0.$$

Ebenso zeigt man

$$\lim_{z \to 1}(1-z)J_2 = 0.$$

Folglich ist

$$\lim_{z \to 1}(1-z)J = 0,$$

woraus sogleich

$$\lim_{z \to 1}(1-z)f(z) = 2\mu \tag{8}$$

hervorgeht. Aus (5) erhält man

$$F(z) = \frac{f(z)-1}{f(z)+1}$$

und

$$\frac{F(z)-1}{z-1} = \frac{2}{(1-z)f(z)+(1-z)}.$$

Daher gilt:

$$\lim_{z \to 1}\frac{F(z)-1}{z-1} = \frac{1}{\mu} = D. \tag{9}$$

Bei positivem μ ist demnach auch D positiv; der Fall $D = 0$ kann wegen $\mu \leqq \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha(\vartheta) = u(0)$ nur für die Funktion $F(z) \equiv 1$ eintreten, die unter den Voraussetzungen des Satzes I die einzige ist, deren durch (5) zugeordnete Funktion $f(z)$ keine Integraldarstellung zuläßt.

Ferner ist in $|z| < 1$

$$\Re(f(z)) = \int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{i\vartheta}-z|^2}\,d\alpha(\vartheta)$$

$$= \mu\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} + \int_{\substack{-\pi \\ \vartheta \neq 0}}^{+\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{i\vartheta}-z|^2}\,d\alpha(\vartheta) \geqq \mu\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2},$$

also, wenn $\mu > 0$, d. h. D endlich ist:

$$\frac{|1 - F(z)|^2}{1 - |F(z)|^2} \leqq D \frac{|1 - z|^2}{1 - |z|^2}. \tag{10}$$

Hierin kann das Gleichheitszeichen für ein z mit $|z| < 1$ offenbar dann und nur dann stehen, wenn $\alpha(\vartheta)$ in $0 < |\vartheta| \leqq \pi$ konstant ist; in diesem Falle steht es aber für alle z aus $|z| < 1$, und es ist

$$f(z) = \frac{1 + F(z)}{1 - F(z)} = \frac{1}{D} \frac{1 + z}{1 - z} + i v(0)$$

oder

$$F(z) = \frac{1 + z - (D + i c)(1 - z)}{1 + z + (D - i c)(1 - z)} \tag{11}$$

mit beliebigem reellem c, was sich auch in der Gestalt

$$F(z) = \frac{(1 - F(0)) z + F(0)(1 - \overline{F(0)})}{\overline{F(0)}(1 - F(0)) z + (1 - \overline{F(0)})} \tag{11'}$$

schreiben läßt mit einem Werte $F(0)$, der nur der Bedingung $|F(0)| < 1$ genügt. Das Gleichheitszeichen in (10) tritt demnach nur für lineare Funktionen ein, die den Einheitskreis unter Festhaltung des Punktes $z = 1$ auf sich selbst abbilden.

Zum Beweise des letzten Teiles von Satz I beachte man, daß

$$f'(z) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{2 e^{i\vartheta}}{(e^{i\vartheta} - z)^2} d\alpha(\vartheta)$$

ist. Für $|z| < 1$, $|z + h| < 1$ gilt nämlich

$$\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{2 e^{i\vartheta}}{(e^{i\vartheta} - z)^2} d\alpha(\vartheta) \right|$$

$$= |h| \left| \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{2 e^{i\vartheta}}{(e^{i\vartheta} - z - h)(e^{i\vartheta} - z)^2} d\alpha(\vartheta) \right| \leqq |h| \frac{2 u(0)}{d^3},$$

wobei d den kleineren der beiden (positiven) Werte

$$d_1 = \min_{|\vartheta| \leqq \pi} |e^{i\vartheta} - z| \quad \text{und} \quad d_2 = \min_{|\vartheta| \leqq \pi} |e^{i\vartheta} - (z + h)|$$

bedeutet. Aus dieser Darstellung von $f'(z)$ erhält man:

$$(1 - z)^2 f'(z) = \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{1 - z}{e^{i\vartheta} - z} \right)^2 2 e^{i\vartheta} d\alpha(\vartheta)$$

$$= 2\mu + \int_{\substack{-\pi \\ \vartheta \neq 0}}^{+\pi} \left(\frac{1 - z}{e^{i\vartheta} - z} \right)^2 2 e^{i\vartheta} d\alpha(\vartheta).$$

Ganz ähnlich wie früher beweist man die Beziehung

$$\lim_{z \to 1} (1 - z)^2 f'(z) = 2\mu. \tag{12}$$

Aus

$$f'(z) = \frac{2}{(1 - F(z))^2} F'(z)$$

zusammen mit (12) ergibt sich

$$\lim_{z \to 1} \left(\frac{1 - z}{1 - F(z)}\right)^2 F'(z) = \mu$$

und demnach, falls $\mu \neq 0$ und endlich ist,

$$\lim_{z \to 1} F'(z) = D. \tag{13}$$

Dies gilt offenbar auch für $D = 0$, da ja dann $F(z) \equiv 1$ ist. Damit ist Satz I in vollem Umfange bewiesen.

Für die Endlichkeit von D hat sich hierbei das folgende Kriterium ergeben: *Die Winkelderivierte D von $F(z)$ ist dann und nur dann endlich, wenn die $F(z)$ durch* (4) *und* (5) *zugeordnete Funktion $\alpha(\vartheta)$ bei $\vartheta = 0$ einen Sprung aufweist.*

Der bequemeren Ausdrucksweise wegen verstehen wir weiterhin unter der Klasse $\mathfrak{S}$ die Menge aller im Einheitskreise analytischen Funktionen, für die dort $|F(z)| \leqq 1$ ist. Aus (10) folgt [7])

$$D \geqq \frac{|1 - F(0)|^2}{1 - |F(0)|^2},$$

insbesondere also $D \geqq 1$, wenn $F(0) = 0$ ist, wobei Gleichheit wegen $v(0) = 0$ nur für die Funktion $F(z) = z$ eintritt. Es gilt aber schärfer der

Satz 1. *Ist $F(z)$ eine Funktion der Klasse $\mathfrak{S}$, die in $z = 0$ eine n-fache Nullstelle besitzt, so ist $D \geq n$, wobei das Gleichheitszeichen nur für $F(z) = z^n$ steht.*

Setzt man nämlich

$$\Phi(z) = \frac{F(z)}{z^n},$$

so ist auch $\Phi(z)$ eine Funktion der Klasse $\mathfrak{S}$, weshalb nach Satz I

$$\lim_{z \to 1} \frac{\Phi(z) - 1}{z - 1} \geqq 0$$

gilt. Weiter ist

$$\frac{\Phi(z) - 1}{z - 1} = \frac{1}{z^n} \frac{F(z) - z^n}{z - 1} = \frac{1}{z^n} \left(\frac{F(z) - 1}{z - 1} - \frac{z^n - 1}{z - 1}\right)$$

[7]) Ist D nicht endlich, so sollen die folgenden Ungleichungen stets als erfüllt gelten.

und daher

$$\lim_{z \to 1} \frac{\Phi(z) - 1}{z - 1} = D - n.$$

Hieraus folgt $D \geqq n$, wobei Gleichheit nur für $\Phi(z) = 1$ oder $F(z) = z^n$ eintreten kann. Offenbar ist dieser Satz nicht umkehrbar, wie man aus

$$D \geqq \frac{|1 - F(0)|^2}{1 - |F(0)|^2}$$

sofort entnehmen kann.

Besitzt die Funktion $F(z)$ der Klasse $\mathfrak{S}$ im Einheitskreis die Potenzreihenentwicklung

$$F(z) = A_n z^n + A_{n+1} z^{n+1} + \ldots \qquad (n \geqq 0)$$

mit

$$A_n = \varrho e^{i\psi} \qquad (|\psi| \leqq \pi),$$

so ist nach dem Cauchyschen Koeffizientensatz $\varrho \leqq 1$, wobei $\varrho = 1$ nur für die Funktion $F(z) = z^n$ gilt, wenn wir noch $F(1) = 1$ verlangen, da andernfalls D sicher nicht endlich ist. Für den Fall $\varrho = 1$ läßt sich demnach die Schranke des Satzes 1 nicht verbessern, wohl aber, falls wir $\varrho < 1$ voraussetzen. Die Funktion

$$\Phi(z) = \frac{F(z)}{z^n}$$

gehört wiederum zur Klasse $\mathfrak{S}$, weshalb für sie nach (10)

$$\lim_{z \to 1} \frac{\Phi(z) - 1}{z - 1} \geqq \frac{|1 - \Phi(0)|^2}{1 - |\Phi(0)|^2} = \frac{|1 - A_n|^2}{1 - |A_n|^2}$$

gilt. Somit ist

$$D \geqq n + \frac{1 + \varrho^2 - 2\varrho \cos\psi}{1 - \varrho^2} > n. \tag{14}$$

Das Gleichheitszeichen steht nach (11′) nur dann, wenn

$$\Phi(z) = \frac{(1 - \Phi(0))\, z + \Phi(0)\,(1 - \overline{\Phi(0)})}{\overline{\Phi(0)}\,(1 - \Phi(0))\, z + (1 - \overline{\Phi(0)})},$$

also

$$F(z) = z^n \frac{(1 - \varrho e^{i\psi}) z + \varrho (e^{i\psi} - \varrho)}{\varrho (e^{-i\psi} - \varrho) z + (1 - \varrho e^{-i\psi})}$$

ist. Zusammenfassend findet man

Satz 2. *Ist*

$$F(z) = A_n z^n + A_{n+1} z^{n+1} + \ldots$$

eine Funktion der Klasse $\mathfrak{S}$, *und ist*

$$A_n = \varrho e^{i\psi} \quad \textit{mit} \quad 0 \leqq \varrho < 1, \quad |\psi| \leqq \pi,$$

so gilt

$$D \geqq n + \frac{1 + \varrho^2 - 2\,\varrho \cos \psi}{1 - \varrho^2},$$

wobei Gleichheit nur für

$$F(z) = z^n \frac{(1 - \varrho\, e^{i\psi})\, z + \varrho\,(e^{i\psi} - \varrho)}{\varrho\,(e^{-i\psi} - \varrho)\, z + (1 - \varrho\, e^{-i\psi})}$$

eintritt.

Der Fall $n = 1$ ist von H. Unkelbach[8]) auf anderem Wege bewiesen worden. Ohne Schwierigkeit ergibt sich aus Satz 2 eine Verschärfung des Satzes von Löwner[9]):

Erfüllt die Funktion $F(z)$ die Voraussetzungen des Satzes 2, besitzt sie überdies auf einem Bogen des Einheitskreises von der Länge a stetige Randwerte vom Betrage 1 und bildet sie diesen Bogen auf einen solchen der Länge b ab, so ist

$$b \geqq \left(n + \frac{1 + \varrho^2 - 2\,\varrho \cos \psi}{1 - \varrho^2}\right) a.$$

Gleichheit gilt nur für

$$F(z) = e^{i\gamma} z^n \frac{(1 - \varrho\, e^{i\psi})\, z + \varrho\,(e^{i\psi} - \varrho)}{\varrho\,(e^{-i\psi} - \varrho)\, z + (1 - \varrho\, e^{-i\psi})}.$$

Aus Satz 2 folgert man ferner leicht, wie dies auch H. Unkelbach für den Fall $n = 1$ tut, die Ungleichungen

$$D \geqq n + \frac{1 - \varrho}{1 + \varrho}, \tag{15}$$

$$D \geqq n + \sin|\psi| \quad \text{für} \quad |\psi| \leqq \frac{\pi}{2}; \qquad D \geqq n + 1 \quad \text{für} \quad \frac{\pi}{2} \leqq |\psi| \leqq \pi. \tag{16}$$

Die zugehörigen Extremalfunktionen sind

$$F(z) = z^n \frac{z + \varrho}{1 + \varrho\, z}, \tag{15'}$$

$$\begin{cases} F(z) = e^{i\psi} z^n \dfrac{z + i\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right)}{z\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right) + i} & \text{für } 0 \leqq \psi \leqq \frac{\pi}{2}, \\ F(z) = e^{i\psi} z^n \dfrac{z\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right) - i}{z - i\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right)} & \text{für } -\frac{\pi}{2} \leqq \psi \leqq 0, \\ F(z) = z^{n+1} & \text{für } \frac{\pi}{2} \leqq |\psi| \leqq \pi. \end{cases} \tag{16'}$$

[8]) H. Unkelbach, Über die Randverzerrung bei konformer Abbildung. Math. Zeitschr. **43** (1938), S. 739—742.

[9]) Vgl. L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie II, (2. Aufl., Teubner, 1931) S. 121.

Es liegt der Versuch nahe, für Funktionen der Klasse $\mathfrak{S}$, die die gleiche endliche Winkelderivierte besitzen, weitere gemeinsame Eigenschaften aufzusuchen. Da indes das Übereinstimmen der Winkelderivierten zweier Funktionen $F(z)$ damit gleichwertig ist, daß die ihnen zugeordneten Funktionen $\alpha(\vartheta)$ an der Stelle $\vartheta = 0$ denselben Sprung aufweisen, erkennt man sogleich die Notwendigkeit zusätzlicher Voraussetzungen, will man nähere Aussagen gewinnen. In dieser Richtung gilt der folgende

Satz 3. *Sind $F_1(z)$, $F_2(z)$ zwei Funktionen der Klasse $\mathfrak{S}$, für die in $|z| < 1$*

$$|F_1(z)| \leqq |F_2(z)|$$

gilt, besitzt ferner $F_1(z)$ eine endliche Winkelderivierte D_1, so ist auch die Winkelderivierte D_2 von $F_2(z)$ endlich, sofern nur für eine in Δ gegen 1 strebende Punktfolge z_n die Beziehung $\lim_{n \to \infty} F_2(z_n) = 1$ gilt. Ferner ist

$$D_2 \leqq D_1,$$

wobei das Gleichheitszeichen nur steht, wenn die beiden Funktionen identisch sind.

Wegen $|F_1(z)| \leqq |F_2(z)|$ in $|z| < 1$ ist

$$1 - |F_2(r)| \leqq 1 - |F_1(r)| < (D_1 + \varepsilon)\ (1 - r)$$

für $r > 1 - \eta$, wobei man $z = re^{i\varphi}$ zu setzen hat [10]). Also ist der Grenzwert

$$\lim_{r \to 1} \inf \frac{1 - |F_2(r)|}{1 - r}$$

endlich. Hieraus folgt aber bereits [11]) wegen

$$\lim_{n \to \infty} F_2(z_n) = 1 \qquad \text{für } z_n \to 1 \text{ in } \Delta$$

die Endlichkeit von D_2. Außerdem gehört die Funktion

$$F(z) = \frac{F_1(z)}{F_2(z)}$$

[10]) Wegen $\lim_{r \to 1} \frac{1 - F_1(r)}{1 - r} = D_1$ ist nämlich

$$\lim_{r \to 1} (1 - r)\, u_1(r) = \lim_{r \to 1} (1 - r) \frac{1 - |F_1(r)|^2}{|1 - F_1(r)|^2} = \frac{2}{D_1},$$

woraus

$$\lim_{r \to 1} \frac{1 - |F_1(r)|}{1 - r} = D_1$$

folgt, da D_1 endlich ist und als von Null verschieden angenommen werden kann. Für $D_1 = 0$ ist offenbar nichts zu beweisen.

[11]) Vgl. die in [1]) angegebene Arbeit von C. Carathéodory, S. 46.

zur Klasse $\mathfrak{S}$; denn an Stellen z_ν mit $|z_\nu| < 1$, in denen $F_2(z)$ verschwindet, hat auch $F_1(z)$ Nullstellen von nicht kleineren Ordnungen. Dann existiert aber der Grenzwert

$$D = \lim_{z \to 1} \frac{F(z) - 1}{z - 1}.$$

Nun ist

$$\frac{F(z) - 1}{z - 1} = \frac{1}{F_2(z)} \left(\frac{F_1(z) - 1}{z - 1} - \frac{F_2(z) - 1}{z - 1} \right).$$

Da D_2 endlich ist, ist $\lim_{z \to 1} F_2(z) = 1$ und demnach

$$D = D_1 - D_2.$$

Nach Satz I ist D nichtnegativ und daher $D_2 \leqq D_1$, worin Gleichheit nur für $F(z) \equiv 1$, d. h. $F_1(z) \equiv F_2(z)$ eintritt.

II. Abschnitt. Das Poisson-Stieltjes-Integral.

Aus der Poisson-Stieltjesschen Integraldarstellung lassen sich eine Reihe von Folgerungen verschiedenster Richtung gewinnen; hiermit wollen wir uns in diesem Abschnitt beschäftigen.

Wir betrachten zunächst aus der Klasse $\mathfrak{S}$ nur die Funktionen $F(z)$, für die $F(0) = 0$ ist, was keine wesentliche Einschränkung bedeutet. Für die durch (5) der Funktion $F(z)$ zugeordnete Funktion $f(z)$ ist dann $f(0) = 1$, mithin in $|z| < 1$

$$f(z) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z} \, d\alpha(\vartheta)$$

mit

$$\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha(\vartheta) = 1.$$

Andererseits gilt in $|z| < 1$ für $f(z)$ eine Potenzreihenentwicklung der Gestalt

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n.$$

Ferner konvergiert die in $|z| < 1$ geltende Entwicklung

$$\frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-in\vartheta} z^n$$

offenbar gleichmäßig in $|\vartheta| \leqq \pi$ bei festem z. Daher darf man gliedweise integrieren und erhält

$$a_n = 2 \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-in\vartheta} \, d\alpha(\vartheta) \qquad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{17}$$

woraus unmittelbar die Abschätzung

$$|a_n| \leqq 2 \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha(\vartheta) = 2 \qquad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots$$

hervorgeht. Wir wollen nun untersuchen, unter welchen Umständen hierin für ein gewisses n

$$|a_n| = 2$$

gelten kann. In diesem Falle ist

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-in\vartheta} d\alpha(\vartheta) = e^{i\gamma} \qquad (|\gamma| \leqq \pi),$$

also insbesondere

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(n\vartheta + \gamma) d\alpha(\vartheta) = 1$$

oder

$$\int_{-\pi}^{+\pi} [1 - \cos(n\vartheta + \gamma)] d\alpha(\vartheta) = 0.$$

Diese Gleichung hat zur Folge, daß sich $\alpha(\vartheta)$ auf eine Sprungfunktion reduziert, die nur an den Stellen, in denen der Integrand verschwindet, Sprünge aufweisen kann, im übrigen aber konstant ist. Nun ist doch in $|\vartheta| \leqq \pi$

$$1 - \cos(n\vartheta + \gamma) = 0$$

für

$$\vartheta = \vartheta_k = \begin{cases} \dfrac{(2k - n)\pi}{n} - \dfrac{\gamma}{n}, & \text{falls } n \text{ gerade, } \gamma \geqq 0, \\ \dfrac{(2k - (n+1))\pi}{n} - \dfrac{\gamma}{n}, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ \dfrac{(2k - (n+2))\pi}{n} - \dfrac{\gamma}{n}, & \text{falls } n \text{ gerade, } \gamma < 0, \end{cases}$$

wobei k die Werte $k = 1, 2, \ldots, n$ durchläuft. Setze ich noch

$$\alpha(\vartheta_k + 0) - \alpha(\vartheta_k - 0) = \mu_k$$

und

$$e^{i\vartheta_k} = e^{-i\frac{\gamma}{n}} \varepsilon_k,$$

wobei $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ die n-ten Einheitswurzeln in gewisser Reihenfolge bezeichnen, so wird

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \frac{\varepsilon_k + e^{i\frac{\gamma}{n}} z}{\varepsilon_k - e^{i\frac{\gamma}{n}} z} \text{ mit } \mu_k \geqq 0; \quad \sum_{k=1}^{n} \mu_k = 1. \tag{18}$$

Ferner wird nach (17)

$$a_m = 2 \sum_{k=1}^{n} \mu_k \frac{e^{im\frac{\gamma}{n}}}{\varepsilon_k^m},$$

insbesondere also für $m = qn$ $(q = 1, 2, 3, \ldots)$:

$$a_m = 2\, e^{i q \gamma},$$

was sich auch unmittelbar aus (18) entnehmen läßt. Somit gilt

Satz 4. *Ist*

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

eine in $|z| < 1$ *analytische Funktion mit positivem Realteil, so ist*

$$|a_n| \leqq 2 \qquad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Steht hierin für ein n das Gleichheitszeichen, so ist

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \frac{\varepsilon_k + e^{i\frac{\gamma}{n}} z}{\varepsilon_k - e^{i\frac{\gamma}{n}} z} \quad \text{mit} \quad \mu_k \geqq 0, \quad \sum_{k=1}^{n} \mu_k = 1,$$

wenn $a_n = 2\, e^{i\gamma}$ *gesetzt ist. Auf* $|z| = 1$ *gilt* $\Re(f(z)) = 0$.

Der Fall $n = 1$ führt, wie man sich leicht überlegt, wegen

$$a_1 = f'(0) = 2F'(0)$$

auf eine dem Schwarzschen Lemma gleichwertige Aussage.

Aus (18) folgt weiter für $F(z)$ wegen

$$f(z) - 1 = f(z) - \sum_{k=1}^{n} \mu_k = 2\, e^{i\frac{\gamma}{n}} z \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{\varepsilon_k - e^{i\frac{\gamma}{n}} z}$$

und

$$f(z) - 1 = 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k \varepsilon_k}{\varepsilon_k - e^{i\frac{\gamma}{n}} z}$$

die Darstellung

$$F(z) = e^{i\frac{\gamma}{n}} z \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{\varepsilon_k - e^{i\frac{\gamma}{n}} z}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k \varepsilon_k}{\varepsilon_k e^{i\frac{\gamma}{n}} z}}.$$

Eine einfache Umformung liefert:

$$(19) \qquad F(z) = e^{i\gamma} z \frac{z^{n-1} + c_1 z^{n-2} + \cdots + c_{n-2} z + c_{n-1}}{1 + c_1 z + \cdots + c_{n-2} z^{n-2} + c_{n-1} z^{n-1}}$$

mit

$$c_\nu = \sum_{k=1}^{n} \mu_k e^{i\nu\vartheta_k} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Wegen

$$1 + \bar{c}_1 z + \ldots + \bar{c}_{n-1} z^{n-1} = \tfrac{1}{2}(1 - e^{i\gamma} z^n)(f(z) + 1)$$

und $\Re(f(z)) = 0$ auf $|z| = 1$ verschwindet der Nenner von (19) in keinem Randpunkte des Einheitskreises. Die Gleichung $|a_n| = 2$ hat demnach zur Folge, daß $F(z)$ entweder eine rationale Funktion vom Grade n ist, die auf $|z| = 1$ stetige Randwerte vom Betrage 1 besitzt, oder sich sogar auf eine Drehung reduziert. Der zweite Fall tritt dann und nur dann ein, wenn $|c_{n-1}| = 1$ ist.

Bei der Herleitung des Satzes 4 erkannten wir, daß mit $|a_n| = 2$ auch $|a_{qn}| = 2$ für alle $q = 1, 2, 3, \ldots$ ist. Als Gegenstück beweisen wir nun den

Satz 5. *Ist bei sonst gleichen Voraussetzungen wie in Satz 4*

$$|a_r| = |a_s| = 2 \quad \textit{und} \quad (r, s) = 1,$$

so gilt $|a_n| = 2$ *für alle* $n = 1, 2, 3, \ldots$ *und*

$$F(z) = \varepsilon z \quad \textit{mit} \quad |\varepsilon| = 1.$$

Wegen der Teilerfremdheit von r und s sind diese Zahlen nicht beide gerade. Ist etwa r ungerade, so folgt aus $|a_r| = 2$ die Beziehung

$$\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha(\vartheta) = \sum_{\varrho=1}^{r} \mu_\varrho = 1 \quad \text{mit} \quad \mu_\varrho = \alpha(\vartheta_\varrho + 0) - \alpha(\vartheta_\varrho - 0) \geqq 0,$$

wobei

$$\vartheta_\varrho = \frac{(2\varrho - (r+1))\pi}{r} - \frac{\gamma}{r} \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r)$$

ist. Ebenso folgt aus $|a_s| = 2$:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha(\vartheta) = \sum_{\sigma=1}^{s} \mu_\sigma = 1 \quad \text{mit} \quad \mu_\sigma = \alpha(\vartheta_\sigma + 0) - \alpha(\vartheta_\sigma - 0) \geqq 0$$

und

$$\vartheta_\sigma = \frac{(2\sigma - (s+\lambda))\pi}{s} - \frac{\delta}{s} \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, s);$$

dabei soll $\lambda = 0, 1, 2$ sein nach der schon früher angegebenen Fallunterscheidung. Nun muß es offenbar ein Indizespaar ϱ, σ geben, für das $\vartheta_\varrho = \vartheta_\sigma$, also

$$\frac{(2\varrho - (r+1))\pi}{r} - \frac{\gamma}{r} = \frac{(2\sigma - (s+\lambda))\pi}{s} - \frac{\delta}{s}$$

ist. Ist ϱ', σ' ein weiteres Paar, für das gleichfalls

$$\frac{(2\varrho' - (r+1))\pi}{r} - \frac{\gamma}{r} = \frac{(2\sigma' - (s+\lambda))\pi}{s} - \frac{\delta}{s}$$

ist, so zeigt die Gleichung

$$\frac{\varrho'}{r} - \frac{\varrho}{s} = \frac{\sigma' - \sigma}{s},$$

daß dies wegen $(r, s) = 1$ nur für $\varrho' = \varrho$, $\sigma' = \sigma$ eintreten kann. Daher ist $\alpha(\vartheta)$ eine Sprungfunktion, die allein an dieser Stelle $\vartheta_\varrho = \vartheta_\sigma$ einen Sprung aufweist, der dann notwendig die Größe 1 besitzt. Daraus folgt

$$f(z) = \frac{e^{i\vartheta_\varrho} + z}{e^{i\vartheta_\varrho} - z},$$

also

$$|a_n| = 2 \qquad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots$$

und

$$F(z) = \varepsilon z \quad \text{mit} \quad |\varepsilon| = 1.$$

Die bei Satz 4 angestellten Betrachtungen zeigen einen Zusammenhang zwischen dem Sprungcharakter von $\alpha(\vartheta)$ und der Darstellung (19) der Funktion $F(z)$, der durch die nachstehende Aussage vollständig geklärt wird:

Satz 6. *Dann und nur dann genügt die Funktion $F(z)$ den Voraussetzungen des Schwarzschen Lemmas und besitzt auf $|z| = 1$ stetige Randwerte vom Betrage 1, wenn $\alpha(\vartheta)$ eine reine Sprungfunktion mit der totalen Diskontinuität 1 ist.*

Es sei

$$-\pi < \vartheta_1 < \vartheta_2 < \ldots < \vartheta_n \leqq \pi \qquad (n \geqq 1),$$

$$\alpha(\vartheta_k + 0) - \alpha(\vartheta_k - 0) = \mu_k, \quad \sum_{k=1}^{n} \mu_k = 1.$$

Dann ist

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \frac{e^{i\vartheta_k} + z}{e^{i\vartheta_k} - z},$$

mithin

$$\Re(f(z)) = 0 \quad \text{auf} \quad |z| = 1.$$

Daraus folgt, daß in $|z| < 1$ die Funktion $F(z)$ regulär, $|F(z)| < 1$ und $F(0) = 0$ ist, also $F(z)$ den Voraussetzungen des Schwarzschen Lemmas genügt, ferner daß $F(z)$ auf $|z| = 1$ stetige Randwerte vom Betrage 1 besitzt.

Genügt umgekehrt $F(z)$ den Voraussetzungen des Schwarzschen Lemmas, und ist auf dem Rande des Einheitskreises $|F(z)|$ stetig und $|F(z)| = 1$, so hat, wie das Schwarzsche Spiegelungsprinzip unmittelbar lehrt, $F(z)$ die Gestalt

$$F(z) = e^{i\gamma} z \, \frac{z^{n-1} + c_1 z^{n-2} + \ldots + c_{n-2} z + c_{n-1}}{1 + \bar{c}_1 z + \ldots + \bar{c}_{n-2} z^{n-2} + \bar{c}_{n-1} z^{n-1}}.$$

Insbesondere ist $F(z)$ auf $|z| = 1$ analytisch. Ferner ist $F(z_1) = 1$ nur für $|z_1| = 1$; ist etwa $F(e^{i\vartheta_1}) = 1$, so setze man

$$e^{-i\vartheta_1} z = \zeta, \quad F(z) = F(e^{i\vartheta_1}\zeta) = \Phi_1(\zeta).$$

Dann ist wegen $\Phi_1(1) = 1$ und wegen der Regularität von $\Phi_1(\zeta)$ in $\zeta = 1$:

$$\lim_{\zeta \to 1} \frac{\Phi_1(\zeta) - 1}{\zeta - 1} = \Phi_1'(1).$$

Nach Satz I folgt aber hieraus, da $\Phi(0) = 0$ ist,

$$\Phi_1'(1) \geqq 1 \quad \text{und} \quad F'(e^{i\vartheta_1}) = e^{-i\vartheta_1}\Phi'(1) \neq 0.$$

Mithin sind die 1-Stellen von $F(z)$ sämtlich einfach[12]). Sind

$$e^{i\vartheta_1}, \ e^{i\vartheta_2}, \ \ldots, \ e^{i\vartheta_n} \qquad (-\pi < \vartheta_1 < \vartheta_2 < \ldots < \vartheta_n \leqq \pi)$$

diese 1-Stellen, so besitzt $f(z)$ dort Pole erster Ordnung. Ferner ist für $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\lim_{z \to e^{i\vartheta_k}} (z - e^{i\vartheta_k}) f(z) = \lim_{z \to e^{i\vartheta_k}} (z - e^{i\vartheta_k}) \frac{1 + F(z)}{1 - F(z)}$$

$$= -\frac{2}{F'(e^{i\vartheta_k})} = -\frac{2\, e^{i\vartheta_k}}{\Phi_k'(1)},$$

wobei

$$\Phi_k(\zeta) = F(e^{i\vartheta_k}\zeta) = F(z)$$

gesetzt ist. Bezeichnet man mit μ_k den Wert

$$\mu_k = \frac{1}{\Phi_k'(1)},$$

so ist μ_k positiv auf Grund des Satzes I und wegen der Regularität der $\Phi_k(\zeta)$ in $\zeta = 1$. Das Residuum von $f(z)$ in $z = e^{i\vartheta_k}$ ist also $-2\mu_k e^{i\vartheta_k}$, weshalb

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \frac{e^{i\vartheta_k} + z}{e^{i\vartheta_k} - z} + C$$

gilt. Für die Konstante C ergibt sich hieraus wegen $F(0) = 0$, d. h. $f(0) = 1$, der Wert

$$C = 1 - \sum_{k=1}^{n} \mu_k.$$

[12]) Hierin ist, wie man leicht erkennt, folgender algebraischer Tatbestand enthalten: Die Nullstellen eines Polynoms der Gestalt $(a_0 - \bar{a}_n) z^n + (a_1 - \bar{a}_{n-1}) z^{n-1} + \ldots + (a_n - \bar{a}_0)$ liegen sämtlich auf $|z| = 1$ und sind einfach, wenn das Polynom $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ nur Nullstellen im Innern des Einheitskreises besitzt.

Da demnach C reell ist, gilt

$$\Re\,(f\,(z)) = C \quad \text{auf} \quad |z| = 1.$$

Andererseits ist $\Re\,(f\,(z)) = 0$ auf $|z| = 1$, da dort $|F\,(z)| = 1$ ist. Somit erhält man

$$C = 0 \quad \text{oder} \quad \sum_{k=1}^{n} \mu_k = 1.$$

Für die Funktion $f\,(z)$ besteht nach Satz II die Darstellung

$$f\,(z) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z}\, d\,\alpha\,(\vartheta).$$

Aus

$$\lim_{z \to e^{i\vartheta_k}} (z - e^{i\vartheta_k})\, f\,(z) = -2\,\mu_k\, e^{i\vartheta_k}$$

und aus der (sinngemäß übertragenen) Beziehung (8) folgt aber

$$\alpha\,(\vartheta_k + 0) - \alpha\,(\vartheta_k - 0) = \mu_k.$$

Ferner ist

$$f\,(0) = \int_{-\pi}^{+\pi} d\,\alpha\,(\vartheta) = 1 \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{n} \mu_k = 1.$$

Demnach ist $\alpha\,(\vartheta)$ eine reine Sprungfunktion mit der totalen Diskontinuität 1.

Bemerkt sei noch, daß wegen

$$a_m = 2 \sum_{k=1}^{n} \mu_k\, e^{-i\,m\,\vartheta_k}$$

dann und nur dann $|a_m| = 2$ für ein festes m gilt, wenn es ein γ mit $|\gamma| \leqq \pi$ gibt, so daß die Zahlen $\vartheta_k + \frac{\gamma}{m}$ (für $k = 1, 2, \ldots, n$) ganzzahlige Vielfache von $\frac{2\pi}{m}$ sind. Denn ist $a_m = 2\,e^{i\gamma}$, so ist

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_k\, e^{-i\,m\left(\vartheta_k + \frac{\gamma}{m}\right)} = 1.$$

Daraus folgt offenbar

$$m\left(\vartheta_k + \frac{\gamma}{m}\right) = 2\,t_k\,\pi \quad \text{mit ganzen Zahlen } t_k,$$

d. h. die Notwendigkeit der obigen Bedingung. Die Umkehrung ist unmittelbar klar.

Faßt man das Poisson-Stieltjes-Integral

$$\int_{\pi}^{+\pi} \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z}\, d\,\alpha\,(\vartheta) + i\,v\,(0) = f\,(z) = \frac{1 + F\,(z)}{1 - F\,(z)} \quad (f\,(z) = u\,(z) + i\,v\,(z))$$

als Funktionaltransformation mit der Menge der in $|\vartheta| \leqq \pi$ monoton wachsenden Funktionen $\alpha(\vartheta)$ als Originalraum und der Menge der Funktionen $F(z)$ der Klasse $\mathfrak{S}$ [13]) als Bildraum auf, so ist die Gleichung

$$\alpha(\vartheta) = \lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\vartheta} u(r e^{i\varphi})\, d\varphi$$

ihre Umkehrung. Die Beziehung $D = \frac{1}{\mu}$ und der Satz 6 können unter diesem Gesichtspunkte als Aussagen über die Theorie dieser Funktionaltransformation angesehen werden. Die folgenden beiden Sätze sollen hierzu noch einen weiteren Beitrag liefern. Zunächst gilt

Satz 7. *Die Gleichung* $\alpha(-\vartheta) = -\alpha(\vartheta)$ *für* $|\vartheta| \leqq \pi$ *ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß* $F(z) = \overline{F(\bar{z})}$ *in* $|z| < 1$ *ist, sofern nur* $F(0)$ *reell ist.*

Ist $\alpha(-\vartheta) = -\alpha(\vartheta)$ in $|\vartheta| \leqq \pi$, so gilt in $|z| < 1$

$$f(z) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{i\vartheta} + \bar{z}}{e^{i\vartheta} - z} d\alpha(\vartheta) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{-i\vartheta} + \bar{z}}{e^{-i\vartheta} - \bar{z}} d\alpha(\vartheta) = f(\bar{z}),$$

also $F(z) = \overline{F(\bar{z})}$. Umgekehrt folgt aus $F(\bar{z}) = \overline{F(z)}$ auch $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$. Also ist $u(re^{-i\varphi}) = u(re^{i\varphi})$ für $|\varphi| \leqq \pi$, mithin

$$\alpha(r, -\vartheta) = -\alpha(r, \vartheta) \text{ für jedes } r < 1 \text{ und } |\vartheta| \leqq \pi.$$

Wegen $\alpha(\vartheta) = \lim_{r \to 1} \alpha(r, \vartheta)$ folgt daraus aber $\alpha(-\vartheta) = -\alpha(\vartheta)$.

Aus der Integraldarstellung von $f(z)$ erhält man unmittelbar für $|z| < 1$:

$$|f(z)| \leqq \frac{1+|z|}{1-|z|} \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha(\vartheta) + |v(0)| < \frac{2u(0)}{1-|z|} + |v(0)|.$$

Nach (7) ist

$$\frac{|1-z|}{1-|z|} < M \qquad \text{für } z \text{ in } \Delta.$$

Also ist

$$f(z) = O\left(\frac{1}{|1-z|}\right) \qquad \text{für } z \to 1.$$

Im weiteren sei nun stets $\lim_{z \to 1} F(z) = 1$, der Fall, der allein von Interesse ist. Dann gilt

$$\frac{1}{1 - F(z)} = O\left(\frac{1}{|1-z|}\right) \qquad \text{für } z \to 1,$$

[13]) Aus der Klasse $\mathfrak{S}$ sei jedoch die Funktion $F(z) \equiv 1$ weggelassen, deren zugeordnete Funktion $f(z)$, wie bereits früher erwähnt, keine Integraldarstellung zuläßt.

d. h.: $F(z)$ wird 1 von höchstens erster Ordnung. Ist $\alpha(0+) - \alpha(0-) = \mu$ positiv, so wird wegen $D = \frac{1}{\mu}$ die Funktion $F(z)$ genau von erster Ordnung gleich 1, wenn z in Winkelannäherung gegen 1 strebt. Ist $\mu = 0$, also $\alpha(\vartheta)$ in $\vartheta = 0$ stetig, so ist

$$\frac{1}{1 - F(z)} = o\left(\frac{1}{1-z}\right) \qquad \text{für } z \to 1.$$

Es liegt nun nahe, die Güte der Stetigkeit von $\alpha(\vartheta)$ in $\vartheta = 0$ mit dem Wachstum von $\frac{1}{1-F(z)}$ bei Winkelannäherung an $z = 1$ in Verbindung zu bringen. Hierüber gibt Auskunft der

Satz 8. *Ist $\alpha(\vartheta)$ für $\vartheta = 0$ Hölder-stetig mit dem Exponenten $1 - \lambda$ $(0 < \lambda \leqq 1)$, d. h. ist*

$$\alpha(\vartheta) = O(|\vartheta|^{1-\lambda}) \qquad \text{für} \quad \vartheta \to 0,$$

so ist

$$\frac{1}{1 - F(z)} = O\left(\frac{1}{|1-z|^{\lambda}}\right) \qquad \text{für } z \to 1.$$

Wegen (7) ist für z in Δ mit $z = r e^{i\varphi}$:

$$\frac{1}{1-r} = O\left(\frac{1}{|1-z|}\right),$$

weshalb es genügt,

$$\frac{1}{1 - F(z)} = O\left(\frac{1}{(1-r)^{\lambda}}\right) \qquad \text{für } z \to 1$$

zu beweisen. Zunächst behandle ich den Sonderfall, daß z auf der reellen Achse gegen 1 strebt. Es sei

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{i\vartheta} + r}{e^{i\vartheta} - r}\, d\alpha(\vartheta) = \int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{+\delta} + \int_{\delta}^{\pi},$$

wobei $\delta > 0$ noch näher bestimmt werden wird. Nun ist

$$\left|(1-r)^{\lambda} \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{e^{i\vartheta} + r}{e^{i\vartheta} - r}\, d\alpha(\vartheta)\right| < \frac{2}{(1-r)^{1-\lambda}} \int_{-\delta}^{+\delta} d\alpha(\vartheta) \quad \text{für } r < 1.$$

Auf Grund der Hölder-Stetigkeit von $\alpha(\vartheta)$ gibt es ferner ein ϑ_0 mit $0 < \vartheta_0 < \pi$, so daß für $|\vartheta| \leqq \vartheta_0$

$$|\alpha(\vartheta)| < C\,|\vartheta|^{1-\lambda}$$

ist. Wählt man $\delta = 1 - r$, so ist $\delta < \vartheta_0$ für $r > 1 - \vartheta_0$, also

$$\left|(1-r)^{\lambda} \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{e^{i\vartheta} + r}{e^{i\vartheta} - r}\, d\alpha(\vartheta)\right| < \frac{2}{(1-r)^{1-\lambda}}\, 2C\,(1-r)^{1-\lambda} = 4C,$$

d. h.

$$\int_{-\delta}^{+\delta} \frac{e^{i\vartheta}+r}{e^{i\vartheta}-r}\, d\alpha(\vartheta) = O\left(\frac{1}{(1-r)^{\lambda}}\right) \qquad \text{für } r \to 1.$$

Ferner ist

$$\int_{\delta}^{\pi} = \int_{1-r}^{\pi} = \int_{1-r}^{\vartheta_0} + \int_{\vartheta_0}^{\pi}.$$

Es genügt, eine Abschätzung für das erste der beiden rechts stehenden Integrale anzugeben, da wir bereits beim Beweis von Satz I die Beziehung

$$\int_{\vartheta_0}^{\pi} \frac{e^{i\vartheta}+r}{e^{i\vartheta}-r}\, d\alpha(\vartheta) = O(1) \qquad \text{für } r \to 1$$

erkannt haben. Zu diesem Zweck setze ich

$$n = \left\langle \frac{\vartheta_0}{1-r} \right\rangle,$$

wenn $g = \langle a \rangle$ die kleinste ganze Zahl $g \geqq a$ bezeichnet. Es ist also

$$\frac{\vartheta_0}{1-r} \leqq n < \frac{\vartheta_0}{1-r} + 1.$$

Dann wird

$$\left| (1-r)^{\lambda} \int_{1-r}^{\vartheta_0} \frac{e^{i\vartheta}+r}{e^{i\vartheta}-r}\, d\alpha(\vartheta) \right|$$

$$\leqq (1-r)^{\lambda} \int_{1-r}^{\vartheta_0} \left| \frac{e^{i\vartheta}+r}{e^{i\vartheta}-r} \right| d\alpha(\vartheta) \leqq (1-r)^{\lambda} \int_{1-r}^{n(1-r)} \left| \frac{e^{i\vartheta}+r}{e^{i\vartheta}-r} \right| d\alpha(\vartheta)$$

$$< 2(1-r)^{\lambda} \sum_{\nu=2}^{n} \int_{(\nu-1)(1-r)}^{\nu(1-r)} \frac{d\alpha(\vartheta)}{|e^{i\vartheta}-r|}.$$

Nun ist

$$(1-r)^{\lambda} \int_{(\nu-1)(1-r)}^{\nu(1-r)} \frac{d\alpha(\vartheta)}{|e^{i\vartheta}-r|}$$

$$\leqq \frac{1}{(1-r)^{1-\lambda}} \cdot \frac{1-r}{|e^{i(\nu-1)(1-r)}-r|} \left[\alpha(\nu(1-r)) - \alpha((\nu-1)(1-r))\right].$$

Für $1 \leqq \nu \leqq n-1$ gilt aber, wie ich zeigen will:

$$\frac{1-r}{|e^{i\nu(1-r)}-r|} < c\,\frac{1}{\nu}.$$

Denn es ist

$$|e^{i\nu(1-r)}-r|^2 = 1 + r^2 - 2r\cos\nu(1-r) = (1-r)^2 + 2r(1-\cos\nu(1-r)),$$

also

$$\frac{|e^{i\nu(1-r)}-r|^2}{\nu^2(1-r)^2}=\frac{1}{\nu^2}+2r\frac{1-\cos\nu(1-r)}{\nu^2(1-r)^2}.$$

Da nun

$$0<\nu(1-r)\leqq(n-1)(1-r)<\vartheta_0<\pi$$

und für $0<x<\pi$

$$\frac{1-\cos x}{x^2}>\frac{2}{\pi^2}=\frac{1}{c^2}$$

gilt, folgt weiter

$$\frac{|e^{i\nu(1-r)}-r|^2}{\nu^2(1-r)^2}>\frac{1}{c^2}\qquad\text{für } r>\frac{1}{2},$$

d. h.

$$\frac{1-r}{|e^{i\nu(1-r)}-r|}<c\,\frac{1}{\nu}$$

mit einer von ν unabhängigen positiven Konstanten c. Daher wird:

$$\begin{aligned}
&\left|(1-r)^\lambda\int_{1-r}^{\vartheta_0}\frac{e^{i\vartheta}+r}{e^{i\vartheta}-r}\,d\alpha(\vartheta)\right|\\
&<\frac{2c}{(1-r)^{1-\lambda}}\sum_{\nu=2}^{n}\frac{1}{\nu-1}\big[\alpha(\nu(1-r))-\alpha((\nu-1)(1-r))\big]\\
&=\frac{2c}{(1-r)^{1-\lambda}}\left\{\sum_{\nu=2}^{n-1}\nu\left(\frac{1}{\nu-1}\right)\alpha(\nu(1-r))+\frac{1}{n-1}\alpha(n(1-r))-\alpha(1-r)\right\}\\
&<\frac{2c}{(1-r)^{1-\lambda}}\left\{C(1-r)^{1-\lambda}\sum_{\nu=2}^{n-1}\frac{1}{\nu^\lambda(\nu-1)}+\frac{\alpha(\pi)}{n-1}\right\}\\
&<C_1\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^{1+\lambda}}+\frac{2c\,\alpha(\pi)}{(1-r)^{1-\lambda}(n-1)}=C_2+\frac{C_3}{(1-r)^{1-\lambda}(n-1)},
\end{aligned}$$

da $\nu(1-r)\leqq(n-1)(1-r)<\vartheta_0$ und $\lambda>0$ ist. Aus

$$n-1\geqq\frac{\vartheta_0}{1-r}-1=\frac{\vartheta_0-(1-r)}{1-r}$$

folgt aber

$$\frac{C_3}{(1-r)^{1-\lambda}(n-1)}=o(1)\qquad\text{für } r\to 1.$$

mithin

$$(1-r)^\lambda\int_{1-r}^{\vartheta_0}\frac{e^{i\vartheta}+r}{e^{i\vartheta}-r}\,d\alpha(\vartheta)=O(1)\qquad\text{für } r\to 1.$$

Dies zusammen mit

$$(1-r)^\lambda \int_{\vartheta_0}^{\pi} \frac{e^{i\vartheta}+r}{e^{i\vartheta}-r}\, d\alpha(\vartheta) = o(1) \qquad \text{für } r \to 1$$

liefert

$$\int_{1-r}^{\pi} \frac{e^{i\vartheta}+r}{e^{i\vartheta}-r}\, d\alpha(\vartheta) = O\left(\frac{1}{(1-r)^\lambda}\right) \qquad \text{für } r \to 1.$$

Ganz ähnlich zeigt man

$$\int_{-\pi}^{-(1-r)} \frac{e^{i\vartheta}+r}{e^{i\vartheta}-r}\, d\alpha(\vartheta) = O\left(\frac{1}{(1-r)^\lambda}\right) \qquad \text{für } r \to 1,$$

woraus sich schließlich

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{i\vartheta}+r}{e^{i\vartheta}-r}\, d\alpha(\vartheta) + i\,v(0) = f(r) = O\left(\frac{1}{(1-r)^\lambda}\right) \qquad \text{für } r \to 1$$

ergibt.

Der Fall beliebiger Winkelannäherung erledigt sich nun in folgender Weise: Aus (7) erkennt man leicht

$$\varphi = O(1-r) \qquad \text{für } z = re^{i\varphi} \text{ in } \Delta.$$

Also gibt es eine positive ganze Zahl N, so daß

$$|\varphi| < N(1-r) \qquad \text{für } z \text{ in } \Delta$$

ist. Man setze nun

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\, d\alpha(\vartheta) = \int_{-\pi}^{-(N+1)(1-r)} + \int_{-(N+1)(1-r)}^{(N+1)(1-r)} + \int_{(N+1)(1-r)}^{\pi}.$$

Wenn r hinreichend nahe bei 1 liegt, so ist sicher

$$(N+1)(1-r) < (n-1)(1-r) = \left(\left\langle \frac{\vartheta_0}{1-r} \right\rangle - 1\right)(1-r) < \vartheta_0.$$

Dann gilt aber

$$\left|(1-r)^\lambda \int_{-(N+1)(1-r)}^{(N+1)(1-r)} \frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\, d\alpha(\vartheta)\right|$$
$$< \frac{2}{(1-r)^{1-\lambda}}\, 2C(N+1)^{1-\lambda}(1-r)^{1-\lambda} = C_4.$$

Weiterhin ist, wie der Beweis des Satzes I zeigt,

$$\int_{\vartheta_0}^{\pi} \frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\, d\alpha(\vartheta) = O(1) \qquad \text{für } z \to 1,$$

mithin

$$(1-r)^\lambda \int_{\vartheta_0}^{\pi} \frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\, d\alpha(\vartheta) = o(1) \qquad \text{für } z \to 1.$$

Ferner ist

$$\left|(1-r)^\lambda \int_{(N+1)(1-r)}^{\vartheta_0} \frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\, d\alpha(\vartheta)\right| < 2(1-r)^\lambda \sum_{\nu=N+2}^{n} \int_{(\nu-1)(1-r)}^{\nu(1-r)} \frac{d\alpha(\vartheta)}{|e^{i\vartheta}-z|}.$$

Wegen

$$(\nu-1)(1-r) \geqq (N+1)(1-r) > |\varphi| \qquad \text{für } z \text{ in } \Delta$$

und

$$\nu(1-r) \leqq n(1-r) < \vartheta_0 + (1-r) \leqq \pi - |\varphi|$$

für hinreichend nahe bei 1 gelegenem r gilt für z in Δ in allen Integralen der voranstehenden Summe

$$|\varphi| < \vartheta < \pi - |\varphi| \quad \text{oder} \quad 0 < \vartheta - \varphi < \pi.$$

Daher ist

$$|e^{i\vartheta}-z| = \sqrt{1+r^2-2r\cos(\vartheta-\varphi)}$$

im Intervall $(N+1)(1-r) \leqq \vartheta \leqq n(1-r)$ eine monoton wachsende Funktion von ϑ, also

$$\operatorname*{Min}_{(\nu-1)(1-r)\leqq\vartheta\leqq\nu(1-r)} |e^{i\vartheta}-z| = |e^{i(\nu-1)(1-r)}-z|$$

für $\nu = N+2, \ldots, n$ und z in Δ.

Folglich ist

$$\left|(1-r)^\lambda \int_{(N+1)(1-r)}^{\vartheta_0} \frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\, d\alpha(\vartheta)\right|$$

$$< \frac{2}{(1-r)^{1-\lambda}} \sum_{\nu=N+2}^{n} \frac{1-r}{|e^{i(\nu-1)(1-r)}-z|} \int_{(\nu-1)(1-r)}^{\nu(1-r)} d\alpha(\vartheta).$$

Nun gilt aber

$$\left|\frac{e^{i\nu(1-r)}-z}{\nu^2(1-r)^2}\right|^2 = \frac{1}{\nu^2} + 2r\,\frac{1-\cos[\nu(1-r)-\varphi]}{\nu^2(1-r)^2},$$

weiter für $\nu = N+1, \ldots, n-1$ und z in Δ

$$\nu(1-r)-\varphi \geqq \nu(1-r)-|\varphi| > \nu(1-r) - N(1-r) = (\nu-N)(1-r) > 0$$

und mit passendem positivem η

$$\nu(1-r)-\varphi \leqq (n-1)(1-r)-\varphi < \vartheta_0 - \varphi < \pi \quad \text{für } r > 1-\eta,$$

mithin

$$\cos[\nu(1-r)-\varphi] < \cos[(\nu-N)(1-r)],$$

also

$$\frac{|e^{i\nu(1-r)}-z|^2}{\nu^2(1-r)^2} > 2r\frac{1-\cos[(\nu-N)(1-r)]}{(\nu-N)^2(1-r)^2}\frac{(\nu-N)^2}{\nu^2} > 2r\frac{2}{\pi^2}\left(\frac{1}{N+1}\right)^2 > \frac{1}{c_1^2}$$

und daher für z in Δ und $r > 1-\eta$

$$\frac{1-r}{|e^{i\nu(1-r)}-z|} < c_1\frac{1}{\nu} \quad \text{für } \nu = N+1, \ldots, n-1$$

mit einer von ν unabhängigen Konstanten c_1. Infolgedessen ist

$$(1-r)^\lambda \int_{(N+1)(1-r)}^{\vartheta_0} \frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\,d\alpha(\vartheta)\Bigg| < \frac{2c_1}{(1-r)^{1-\lambda}} \sum_{\nu=N+2}^{n} \frac{1}{\nu-1} \int_{(\nu-1)(1-r)}^{\nu(1-r)} d\alpha(\vartheta).$$

Da aber im ersten Teil des Beweises die Beschränktheit der rechten Seite dieser Ungleichung für $r \to 1$ nachgewiesen ist, erhalten wir hieraus

$$\int_{(N+1)(1-r)}^{\pi} \frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\,d\alpha(\vartheta) = O\left(\frac{1}{(1-r)^\lambda}\right) \qquad \text{für } z \to 1.$$

Auf dieselbe Weise folgt

$$\int_{-(N+1)(1-r)}^{-\pi} \frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\,d\alpha(\vartheta) = O\left(\frac{1}{(1-r)^\lambda}\right) \qquad \text{für } z \to 1$$

und damit

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\,d\alpha(\vartheta) + iv(0) = f(z) = O\left(\frac{1}{(1-r)^\lambda}\right) \qquad \text{für } z \to 1.$$

Wegen

$$f(z) = \frac{1+F(z)}{1-F(z)}$$

ist daher

$$\frac{1}{1-F(z)} = O\left(\frac{1}{|1-z|^\lambda}\right) \qquad \text{für } z \to 1.$$

Damit ist Satz 8 vollständig bewiesen.

Hiervon wollen wir noch abschließend eine Anwendung machen: Es sei $u(\vartheta)$ eine in $|\vartheta| \leq \pi$ nach unten beschränkte Funktion, für die das (im Lebesgueschen Sinne genommene) Integral

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |u(\vartheta)|\,d\vartheta$$

existiert. Dann ist bekanntlich

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} u(\vartheta) \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\vartheta - \varphi)} d\vartheta \qquad (z = r e^{i\varphi})$$

eine in $|z| < 1$ reguläre Potentialfunktion. Ferner gelte in $|\vartheta| \leqq \vartheta_0 < \pi$

$$|u(\vartheta)| < C \frac{1}{|\vartheta|^\lambda} \quad \text{mit } 0 < \lambda < 1.$$

Setzen wir zunächst $u(\vartheta)$ in $|\vartheta| \leqq \pi$ als nichtnegativ voraus, so ist

$$\alpha(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\vartheta} u(\varphi)\, d\varphi \quad \text{in } \langle -\pi, +\pi \rangle$$

monoton wachsend und

$$|\alpha(\vartheta)| < C_1 |\vartheta|^{1-\lambda} \text{ in } |\vartheta| \leqq \vartheta_0.$$

Weiter ist wegen der Integrabilität von $u(\vartheta)$:

$$u(z) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\vartheta - \varphi)} d\alpha(\vartheta).$$

Setzt man noch

$$f(z) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z} d\alpha(\vartheta),$$

so ist nach Satz 8:

$$f(z) = O\left(\frac{1}{(1-r)^\lambda}\right) \qquad \text{für } z \to 1.$$

Mithin ist auch

$$u(z) = \Re(f(z)) = O\left(\frac{1}{(1-r)^\lambda}\right) \qquad \text{für } z \to 1.$$

Ist indes allgemeiner

$$u(\vartheta) \geqq -G \qquad \text{in } |\vartheta| \leqq \pi$$

mit einem positiven G, so betrachte ich die im gleichen Intervall nichtnegative Funktion

$$u_1(\vartheta) = u(\vartheta) + G.$$

Für diese Funktion existiert gleichfalls das Integral $\int_{-\pi}^{+\pi} u_1(\vartheta)\, d\vartheta$ und gilt die

Beziehung $u_1(\vartheta) < C' |\vartheta|^{-\lambda}$ in $|\vartheta| \leqq \vartheta_0$ mit einer geeigneten Konstanten C'. Nun ist aber

$$u_1(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} u_1(\vartheta) \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\vartheta-\varphi)} d\vartheta = u(z) + G.$$

Nach dem eben Bewiesenen ist für die Funktion $u_1(z)$:

$$u_1(z) = O\left(\frac{1}{(1-r)^\lambda}\right) \qquad \text{für } z \to 1,$$

mithin auch

$$u(z) = O\left(\frac{1}{(1-r)^\lambda}\right) \qquad \text{für } z \to 1.$$

Also gilt der

Satz 9. *Ist die Funktion $u(\vartheta)$ in $|\vartheta| \leqq \pi$ nach unten beschränkt und daselbst im Lebesgueschen Sinne absolut integrierbar, ist ferner in $|\vartheta| \leqq \vartheta_0 < \pi$*

$$|u(\vartheta)| < C \frac{1}{|\vartheta|^\lambda} \quad \text{mit } 0 < \lambda < 1,$$

so ist für $z = r e^{i\varphi}$

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} u(\vartheta) \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\vartheta-\varphi)} d\vartheta = O\left(\frac{1}{(1-r)^\lambda}\right),$$

wenn z in Winkelannäherung gegen 1 strebt.

(Eingegangen am 17. Oktober 1939.)

Lebenslauf

Am 27. Mai 1915 wurde ich als Sohn des kaufmännischen Angestellten Arthur Herzig und seiner Ehefrau Antonie geb. Reier, in Breslau geboren. Ich bin deutscher Abstammung und katholischen Bekenntnisses. Nach Besuch der Volksschule und des Staatlichen Matthiasgymnasiums bestand ich im Jahre 1933 die Reifeprüfung. Vom S. S. 1933 bis zum S. S. 1938 studierte ich an der Schlesischen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Breslau Mathematik, Physik und Chemie und nahm an Vorlesungen, Übungen und Seminaren der folgenden Herren Professoren teil: Baur, Bergmann, Biltz, Feigl, Fues, Hoheisel, Meyer, Rademacher, Radon, Schaefer. Ihnen allen, insbesondere aber Herrn Professor Radon für die Anregung zu dieser Arbeit, sage ich an dieser Stelle meinen Dank.

Alfred Herzig